LRCB Sàrl - Case Postale 7090 - CH-2500 Bienne 7 - tél./fax +41 (0)32 365 18 54 - www.lrcb.ch

La résolution des équations polynomiales

Patrick Eggli, novembre 2011

Le théorème d'Abel-Ruffini-Galois démontre que les équations de degré 5 ou plus ne peuvent pas être résolues par radicaux. Les équations du degré 1 à 3 peuvent être résolues par les méthodes suivantes :

1. Equations du 1^{er} degré

Elle comporte une solution. Elle est de la forme :

$$\boxed{ax + b = 0}$$

La solution se calcule simplement :

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

2. Equations du 2^{ème} degré

Elle peut comporter jusqu'à deux solutions. Elle est de la forme :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

On calcule le discriminant qui détermine le type de solutions :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Les solutions s'obtiennent selon le signe du déterminant :

Si $\Delta > 0$	Deux solutions réelles	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$	Une solution réelle double	$x_1 = -\frac{b}{2a}$	$x_2 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta < 0$	Deux solutions complexes	$x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

L'ensemble des solutions s'écrit aussi plus simplement :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Vérification :

Les solutions d'une équation du 2^{ème} degré sont liées aux coefficients selon :

$$\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \qquad -\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

3. Equations du 3^{ème} degré

Elle peut comporter jusqu'à trois solutions. Elle est de la forme :

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$$

La résolution se fait à l'aide de la méthode de Cardan.
La première étape consiste à simplifier l'équation complète en une équation réduite sans terme au 2^{ème} degré :

$z^3 + pz + q = 0$ avec z comme inconnue réduite telle que $x = z - \dfrac{b}{3a}$

Les deux coefficients intermédiaires p et q se calculent :

$$\boxed{p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{q = \frac{b}{27a}\left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a}\right) + \frac{d}{a}}$$

On calcule ensuite le discriminant qui détermine le type de solutions :

$$\boxed{\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3}$$

Les solutions partielles u et v s'obtiennent selon le signe du déterminant :

Si $\Delta > 0$	Une solution réelle et deux complexes	$u = \sqrt[3]{\dfrac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}$	$v = \sqrt[3]{\dfrac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$
Si $\Delta = 0$	Deux solutions réelles (une simple et une double)	$u = \sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}$	$v = \sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}}$
Si $\Delta < 0$	Trois solutions réelles	$u = \sqrt[3]{\dfrac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2}}$	$v = \sqrt[3]{\dfrac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}}$

On introduit deux nombres imaginaires $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et son conjugué $\bar{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ils ont les propriétés particulières suivantes : $j \cdot \bar{j} = 1 \quad j^2 = \bar{j} \quad \bar{j}^2 = j$

Les solutions de l'équation réduite se calculent :

$$\boxed{z_1 = u + v} \quad \boxed{z_2 = u \cdot j + v \cdot \bar{j}} \quad \boxed{z_3 = u \cdot \bar{j} + v \cdot j}$$

Puis on revient aux solutions de l'équation complète avec :

$$\boxed{x_1 = z_1 - \frac{b}{3a}} \quad \boxed{x_2 = z_2 - \frac{b}{3a}} \quad \boxed{x_3 = z_3 - \frac{b}{3a}}$$

Vérification :

Les solutions d'une équation du 3^{ème} degré sont liées aux coefficients selon :

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \qquad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \qquad -\frac{d}{a} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$
