LRCB Sàrl - 26, chemin des Vignes - CH-2503 Bienne - tél./fax +41 (0)32 365 18 54 - www.lrcb.ch

Rotation dans le R-espace vectoriel de dimension 3

Patrick Eggli, décembre 2020

Cette présentation a pour but de démontrer la formule d'Euler-Rodrigues qui permet d'effectuer la rotation de vecteurs dans l'espace. Il s'agira également de détailler certaines particularités.

On va considérer ici un R-espace vectoriel euclidien de dimension 3. On munit cet espace d'une base orthonormée B quelconque définie par trois vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

On va ensuite considérer deux sous espaces, l'un de dimension 1, l'autre de dimension 2, supplémentaires et compléments orthogonaux l'un de l'autre.

Le sous-espace de dimension 1 est représentable par une droite. Il est choisi tel que celui-ci coïncide avec l'axe de rotation. On défini ensuite l'unique vecteur normalisé $\mathbf{k}$ constituant une base de ce sous-espace. C'est le vecteur autour duquel on va effectuer la rotation.

Le sous-espace de dimension 2 correspond au plan de rotation, normal au vecteur $\mathbf{k}$.

On va s'intéresser ici à la transformation linéaire que l'on pourra opérer sur n'importe quel vecteur $\mathbf{v}$ pour lui faire effectuer une rotation d'un angle arbitraire θ autour de l'axe engendré par $\mathbf{k}$.

1. Introduction

La rotation peut être vue comme une transformation linéaire à l'intérieur du même espace. Cette transformation linéaire est un automorphisme[1]. Une transformation linéaire peut être représentée par une matrice notée ici $\mathbf{R}$ dont le produit agit sur un vecteur quelconque $\mathbf{v}$.

Le vecteur subira une rotation dans le sens antihoraire d'un angle θ autour du sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\mathbf{k}$ (figure 1). La transformation linéaire est un produit matriciel qui s'écrit selon l'équ. 1.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}(\mathbf{k}, \theta) \cdot \mathbf{v}$$

Equ. 1: Transformation linéaire correspondant à une rotation

La matrice de rotation est entièrement définie par le vecteur $\mathbf{k}$ et l'angle θ.

La norme, c'est-à-dire la longueur du vecteur est conservée, soit $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$. La matrice associée à une transformation linéaire conservant la norme est dite orthogonale et vérifie l'équ. 2. De même, l'angle entre deux vecteurs subissant ensemble la même rotation est aussi conservé.

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

Equ. 2: Condition d'orthogonalité

[1] Une transformation linéaire d'un espace vers le même espace est un endomorphisme. Un endomorphisme peut être représenté par une matrice carrée. Lorsqu'il est en plus bijectif, on l'appelle automorphisme.

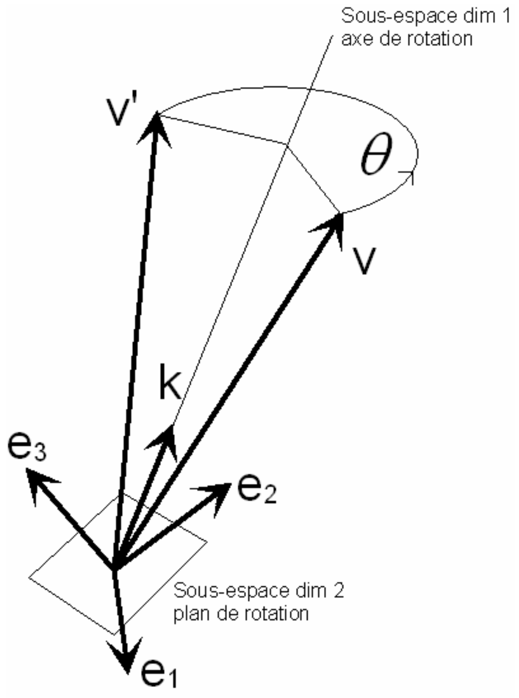

Fig. 1

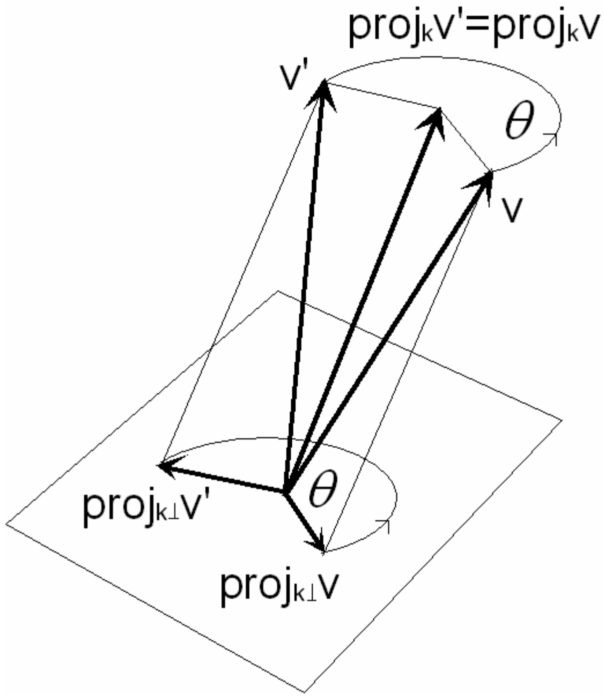

Fig. 2

La projection sur le plan de rotation normal à $\mathbf{k}$, le sous-espace de dimension 2, effectue le même angle de rotation θ. La projection sur le sous-espace de dimension 1 est invariante (Figure 2).

<u>Remarques à propos des projections</u>

La transformation linéaire effectuant une projection est appelée <u>projecteur</u>. On peut montrer que la projection d'une projection reste toujours la même projection par définition (equ. 3). La matrice associée à un tel opérateur multipliée par elle-même n fois est donc toujours égale à elle-même.

$$\mathbf{proj_k}(\mathbf{proj_k}\,\mathbf{v}) = \mathbf{proj_k}\,\mathbf{v}$$

Equ. 3: Projection d'une projection

$$(\mathbf{proj_k})^n = \mathbf{proj_k}$$

Equ. 4: Transformation idempotente

Une transformation vérifiant cette propriété est dite <u>idempotente</u>.

2. Construction d'une matrice de rotation

On va maintenant se placer dans un contexte permettant d'exprimer une rotation de manière simple. On définit une base particulière orthonormée et canonique notée ici C, de sorte qu'un des vecteurs de la base soit colinéaire au vecteur $\mathbf{k}$ selon l'équ. 6. Dans l'exemple ci-dessous, le vecteur $\mathbf{k}$ est choisi colinéaire à l'axe z, le plan de rotation étant alors xOy.

$$\mathbf{k}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Equ. 5: Expression du vecteur $\mathbf{k}$ *dans la base* C

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equ. 6: Expression de la matrice de rotation dans la base C

La matrice de rotation est classique selon l'équ. 6.

Dans le cas général, la rotation est effectuée dans une base orthonormée quelconque notée ici B. A partir d'un vecteur $\mathbf{k}_B$, il s'agira de trouver la matrice de rotation $\mathbf{R}_B$ dans cette base.

On peut exprimer ce changement de base de la base simple C vers la base quelconque B à l'aide d'une matrice de passage comme :

$$\mathbf{R}_B = [id]_{BC} \mathbf{R}_C [id]_{CB} = \mathbf{P}\mathbf{R}_C \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{R}_C \mathbf{P}^T$$

Equ. 7: Changement de base de la matrice de rotation

Avec $\mathbf{P} = [id]_{BC}$ une matrice de changement de base orthonormée, dont les trois vecteurs colonnes sont normalisés et orthogonaux entre eux, constituant la base C exprimée dans la base B.

3. Démonstration par le changement de base

On construit la matrice de changement de base à l'aide de trois vecteurs constituant ses trois colonnes :

- Le vecteur engendrant le sous-espace autour duquel la rotation est effectuée
- Deux vecteurs orthogonaux qui forment une base du plan de rotation

Le vecteur colinéaire à l'axe autour duquel la rotation est effectuée a pour composantes $\mathbf{k}_B = (A, B, C)^T$ exprimés dans la base B.
Les deux autres vecteurs sont notés ici avec comme composantes $(a, b, c)^T$ et $(d, e, f)^T$. N'importe quelle paire de vecteurs orthogonaux entre eux dans le plan de rotation peut être choisie. On va montrer qu'il n'est pas nécessaire de les connaître.

La matrice de rotation dans la base quelconque C s'exprime de manière détaillée par :

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{P}\mathbf{R}_C \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} a & d & A \\ b & e & B \\ c & f & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ A & B & C \end{bmatrix}$$

Equ. 8: Changement de base de la matrice de rotation détaillé

En effectuant le produit puis en séparant les termes, on trouve :

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} A^2 & AB & AC \\ AB & B^2 & BC \\ AC & AB & C^2 \end{bmatrix} + \cos(\theta) \cdot \begin{bmatrix} a^2 + d^2 & ab + de & ac + df \\ ab + de & b^2 + e^2 & bc + ef \\ ac + df & bc + ef & c^2 + f^2 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 & bd - ae & -af + cd \\ -bd + ae & 0 & ce - bf \\ af - cd & -ce + bf & 0 \end{bmatrix}$$

Equ. 9: Changement de base de la matrice de rotation développé et séparé

On observe que la première et la seconde matrice sont symétriques et la troisième est antisymétrique.

Il convient de rappeler deux propriétés nécessaires ici :

a) La matrice de passage $\mathbf{P}$ est orthonormée donc $\mathbf{PP}^T = \mathbf{I}$ ce qui implique que la somme des carrés de chaque ligne ou la somme des carrés de chaque colonne est égale à un, ainsi que la somme des produits de composantes de deux lignes respectivement de deux colonnes de rang différent est égal à zéro. Par exemple :

$$a^2 + d^2 + A^2 = 1,\quad A^2 + B^2 + C^2 = 1,\quad ab + de + AB = 0,\quad aA + bB + cC = 0 \text{ etc.}$$

b) Les trois vecteurs colonnes formant la matrice de passage $\mathbf{P}$ sont orthogonaux entre eux. Comme ils sont tous de norme 1, ils peuvent être reliés par le produit vectoriel :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Les vecteurs étant choisis dans l'ordre de sorte à respecter la règle du tire-bouchons.

On peut ainsi simplifier l'expression de l'équ. 9 comme :

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} A^2 & AB & AC \\ AB & B^2 & BC \\ AC & AB & C^2 \end{bmatrix} + \cos(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1 - A^2 & -AB & -AC \\ -AB & 1 - B^2 & -BC \\ -AC & -BC & 1 - C^2 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{bmatrix}$$

Equ. 10: Changement de base de la matrice de rotation reformulé

Démontrant qu'il n'est pas nécessaire de connaître les deux vecteurs constituant une base dans le plan de rotation.

En définissant la matrice $\mathbf{K}$ à l'aide des composantes du vecteur $\mathbf{k}$ et en développant son carré on constate :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 1 - B^2 - C^2 & AB & AC \\ AB & 1 - A^2 - C^2 & BC \\ AC & AB & 1 - A^2 - B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & AB & AC \\ AB & B^2 & BC \\ AC & AB & C^2 \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 1 - A^2 & -AB & -AC \\ -AB & 1 - B^2 & -BC \\ -AC & -AB & 1 - C^2 \end{bmatrix}$$

Il est utile d'observer que $\mathbf{I} + \mathbf{K}^2 = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = proj_{\mathbf{k}}$ est le projecteur sur le vecteur $\mathbf{k}$ et $-\mathbf{K}^2 = proj_{\mathbf{k}\perp}$ est le projecteur sur le plan de rotation, normal à $\mathbf{k}$ (voir fig. 2). Ces deux projecteurs sont compléments orthogonaux puisque leur somme égale l'identité.

Finalement, ces relations permettent de trouver à partir de l'équ. 10 l'expression de la matrice de rotation dans la base quelconque B, connue sous le nom de formule d'Euler-Rodrigues :

$$\mathbf{R}_B = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^2) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{K} - \cos(\theta) \cdot \mathbf{K}^2 = \mathbf{I} + \sin(\theta) \cdot \mathbf{K} + (1 - \cos(\theta)) \cdot \mathbf{K}^2$$

Equ. 11: Formule d'Euler-Rodrigues

4. Démonstration par le groupe de Lie SO(3)

Il existe une autre manière d'obtenir la formule d'Euler-Rodrigues basée sur la théorie de Lie. Une rotation dans le R-espace de dimension 3 appartient au groupe de Lie SO(3). Il s'agit bien d'un groupe car :

- La rotation d'une rotation est aussi une rotation
- Il existe un élément neutre, l'identité
- Il existe toujours une rotation inverse

Cette théorie est une représentation des rotations basée sur le passage d'une « algèbre de Lie » vers un « groupe de Lie » par l'application exponentielle, c'est-à-dire le calcul de l'exponentielle d'une matrice.

L'algèbre de Lie so(3)[2] est construite sur un espace vectoriel de matrices, dont les éléments appelés générateurs sont au nombre de 3 dans le cas présent, associés au commutateur $[u,v] = uv - vu$.

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{J}_i\mathbf{J}_j - \mathbf{J}_j\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_k & i \neq j \\ \mathbf{J}_i\mathbf{J}_j - \mathbf{J}_j\mathbf{J}_i = \mathbf{0} & i = j \end{matrix}$$

La matrice $\mathbf{K}$ se construit à l'aide des trois générateurs munis chacun d'un coefficient qui sont les composantes du vecteur $\mathbf{k}$. Il s'agit de la même matrice que celle définie dans le paragraphe précédent.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \qquad \|\mathbf{k}\|^2 = 1 \qquad \mathbf{K} = A \cdot \mathbf{J}_1 + B \cdot \mathbf{J}_2 + C \cdot \mathbf{J}_3$$

L'application exponentielle permet de passer de l'algèbre de Lie au groupe de Lie et fournit directement la matrice de rotation d'angle θ (donné en [rad] !) autour de $\mathbf{k}$ grâce à la relation :

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{k}) = e^{\theta \cdot \mathbf{K}}$$

Equ. 13: Application exponentielle

L'exponentielle d'une matrice se développe en série de Taylor comme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \theta \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{2!}\theta^2 \cdot \mathbf{R}^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 \cdot \mathbf{R}^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 \cdot \mathbf{R}^4 + \frac{1}{5!}\theta^5 \cdot \mathbf{R}^5 + \frac{1}{6!}\theta^6 \cdot \mathbf{R}^6 + \ldots$$

Equ. 14: Développement en série de l'exponentielle

[2] S'écrit normalement à l'aide de caractères gothiques

Les coefficients de la matrice $\mathbf{K}$ sont normalisés et ses puissances sont donc cycliques :

$$\mathbf{K} = -\mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^5 = -\mathbf{K}^7 = \ldots \qquad \mathbf{K}^2 = -\mathbf{K}^4 = \mathbf{K}^6 = -\mathbf{K}^8 = \ldots$$

Puissances impaires *Puissances paires*

On peut donc décomposer le développement en série entre les puissances paires et impaires :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{K} \cdot \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots \right) + \mathbf{K}^2 \cdot \left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{8!}\theta^8 + \ldots \right)$$

Equ. 15: Développement en série de l'exponentielle séparée

Les deux développements s'identifient aux développement en série des fonction trigonométriques $\sin(\theta)$ et $1-\cos(\theta)$, ce qui conduit à l'expression de la formule d'Euler-Rodrigues, identique à l'équ. 11 :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin(\theta) \cdot \mathbf{K} + (1-\cos(\theta)) \cdot \mathbf{K}^2$$

Equ. 16: Formule d'Euler-Rodrigues

5. Cas d'une rotation de 180°, symétrie

Une rotation de π ou 180° correspond à une symétrie axiale, dont l'axe est le sous-espace engendré par $\mathbf{k}$.

La matrice obtenue est particulière. La symétrie d'une symétrie renvoie l'objet original. Pour un vecteur, l'application linéaire appliquée deux fois renvoie le vecteur de départ soit $\mathbf{S}(\mathbf{S}\mathbf{v}) = \mathbf{v} = \mathbf{I}\mathbf{v}$. Le produit matriciel étant associatif, cela se simplifie en $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^2 = \mathbf{I}$. Une transformation vérifiant cette propriété est dite involutive.

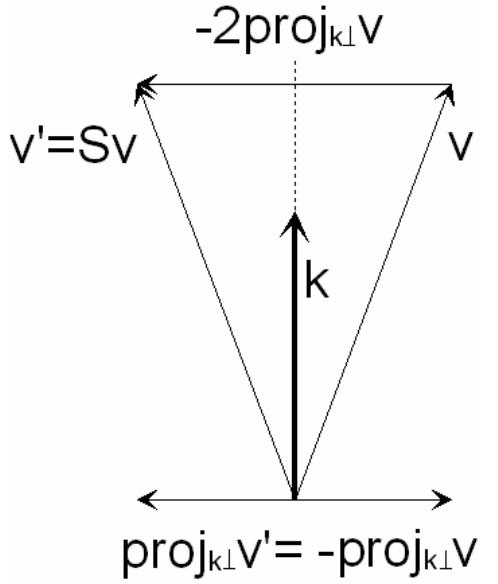

Fig. 3: Schéma d'une symétrie

On peut également vérifier que la projection sur le plan de rotation présente une propriété particulière.

$$\mathbf{v} - 2 \cdot \mathbf{proj}_{\mathbf{k}\perp} \mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v} \qquad \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{proj}_{\mathbf{k}\perp} = \mathbf{S}$$

Equ. 17: Somme vectorielle d'une symétrie *Equ. 18: Relation entre les matrices*

Cette dernière relation permet d'associer une matrice idempotente à une matrice involutive[3].

6. Recherche à partir d'une matrice de rotation donnée

Lorsque l'on dispose d'une matrice de rotation quelconque, rappelons qu'elle doit être orthogonale, il est possible de trouver l'angle de rotation correspondant ainsi que le vecteur autour duquel la rotation est effectuée.

a) Recherche de l'angle de rotation

En développant le calcul de la trace de la matrice de rotation à l'aide de la formule d'Euler-Rodrigues (equ.11), on constate que la trace de la matrice antisymétrique $\mathbf{K}$ est nulle et celle des matrices symétriques $\mathbf{I}+\mathbf{K}^2$ et $-\mathbf{K}^2$ sont respectivement de 1 et 2 car $A^2+B^2+C^2=1$ et $Tr(\mathbf{I})=3$. Cela donne :

$$Tr(\mathbf{R}) = 1 + 2\cos(\theta)$$

Equ. 19 : Trace de la matrice de rotation

On peut ainsi aisément calculer l'angle de rotation à partir de la matrice de rotation.

b) Recherche du vecteur engendrant l'axe de rotation

Toute matrice peut être décomposée de manière unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique. La partie antisymétrique de la matrice de rotation correspond au seul terme antisymétrique de l'équ. 10 qui s'exprime comme l'équ. 20 :

$$\frac{1}{2}(\mathbf{R}-\mathbf{R}^T) = \sin(\theta)\cdot\mathbf{K}$$

Equ. 20 : Décomposition antisymétrique

Connaissant l'angle, la décomposition antisymétrique de la matrice de rotation permet de calculer la matrice $\mathbf{K}$ et donc les composantes de $\mathbf{k}$ à l'aide des équ. 21 et 22.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{bmatrix}$$

Equ. 20: Composantes de la matrice

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Equ. 21 : Expression de $\mathbf{k}$

---

[3] A. Lentin, J. Rivaud « Eléments d'Algèbre Moderne » Vuibert, 1963, p185 ; voir exercice 8